

INSTITUT DES HAUTES ÉTUDES

POUR LE DÉVELOPPEMENT DE LA CULTURE, DE LA SCIENCE ET DE LA TECHNOLOGIE EN BULGARIE

<http://www.iheb.org/>

Concours Général de Physique “Minko Balkanski”

8 Mai 2010

Le problème et les trois exercices sont entièrement indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

La clarté et la précision de la rédaction, qui doit être en français ou en anglais, seront prises en compte dans la note finale.

La durée de la composition est de 4 heures ! Les calculatrices sont autorisées.

Valeurs numériques :

Masse de la Terre : $M_T = 6,0 \cdot 10^{24} kg$
Masse du Soleil : $M_S = 2,0 \cdot 10^{30} kg$
Rayon terrestre moyen : $R_T = 6,4 \cdot 10^6 m$
Rayon solaire moyen : $R_S = 7,0 \cdot 10^8 m$
Rayon moyen de l'orbite de la Terre autour du Soleil : $L = 1,5 \cdot 10^{11} m$
Durée d'une révolution du Soleil sur lui-même : $\theta_S = 2,6 \cdot 10^6 s$
Constante de gravitation universelle : $G = 6,67 \cdot 10^{-11} N.m^2.kg^{-2}$
Constante des gaz parfaits : $\Re = 8,31 J.K^{-1}.mol^{-1}$
Constante d'Avogadro : $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} mol^{-1}$
Masse molaire de l'élément hydrogène : $M_H = 1,0 \cdot 10^{-3} kg.mol^{-1}$
Vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3,0 \cdot 10^8 m.s^{-2}$

Première partie

Problème

1 Champ de gravitation (8pts)

Dans cette partie, le Soleil et la Terre sont assimilés à des sphères homogènes. On cherche à exprimer le champ de gravité, le potentiel de gravitation et des énergies gravitationnelles par analogie avec l'électrostatique.

1. Exprimer, en un point A , le champ électrique $\vec{E}(A)$ créé par une charge ponctuelle q placée en un point O , en posant : $OA = r$ et $\vec{u}_r = \frac{\vec{OA}}{r}$.
2. On considère une surface sphérique S , de centre O .
 - (a) Rappeler l'énoncé du théorème de Gauss pour le champ électrostatique.
 - (b) Déterminer le flux Φ du vecteur $\vec{E}$ sortant de S . On notera Q_{int} la charge totale intérieure à la surface sphérique S .
3. On a une boule de rayon R uniformément chargée, de charge totale Q .
 - (a) Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}(r)$ que cette boule crée à une distance r de son centre O pour r compris entre 0 et ∞ , en fonction de Q , $\vec{u}_r$, r et R . On distinguera le cas $0 < r < R$ du cas $R < r < +\infty$.
4.
 - (a) Rappeler la relation entre l'énergie d'interaction électrique entre la boule de la question (3.a) et une charge q ponctuelle placée à la distance r de son centre O , et le potentiel électrostatique $U(r)$ de cette boule, déterminé à la question précédente.
 - (b) Déterminer cette énergie d'interaction électrique notée E_1 (supposée nulle à l'infini).
5.
 - (a) Rappeler l'expression de la densité volumique d'énergie électrostatique en un point M où le champ a pour valeur $\vec{E}(M)$.
 - (b) Montrer que l'énergie propre électrostatique de la boule peut s'écrire sous la forme $E_2 = \frac{kQ^2}{4\pi\epsilon_0 R}$.
6. On procède à présent par analogie formelle entre champ électrique et champ gravitationnel :
 - (a) Exprimer, en un point A , le champ gravitationnel $\vec{g}(A)$ créé par une masse ponctuelle m placée en un point O , en posant : $OA = r$ et $\vec{u}_r = \frac{\vec{OA}}{r}$.
 - (b) Présenter précisément les couples de grandeurs analogues (exemple : charge et masse).

- (c) On considère une boule de rayon R homogène, de masse M . Déterminer le champ gravitationnel $\vec{g}(r)$ que cette boule va créer à une distance r de son centre O , pour r compris entre 0 et $+\infty$
 - (d) Application numérique : calculer l'intensité g_{ST} du champ de gravitation créé par le Soleil à la surface de la Terre puis l'intensité g_{TS} du champ de gravitation créé par la Terre à la surface du Soleil.
 - (e) Déterminer l'énergie d'interaction gravitationnelle entre la Terre, supposée ponctuelle, et le Soleil.
 - (f) Application numérique.
7. Déterminer l'énergie propre gravitationnelle du Soleil et de la Terre, notées respectivement, E_{2S} et E_{2T} .
 8. Application numérique : calculer ces énergies ainsi que l'énergie E_{2TS} de l'ensemble Terre-Soleil en négligeant, pour le calcul de l'énergie d'interaction, leurs rayons devant la distance qui les sépare. Commenter les résultats.

2 Stabilité d'une étoile sphérique (8pts)

1. Stabilité thermique.

On utilise le modèle d'une étoile sphérique homogène de rayon R et de masse M constituée d'atomes d'hydrogène de masse molaire M_H dans l'état de gaz parfait en équilibre thermique à la température uniforme T . Chaque atome possède l'énergie cinétique $e_c = \frac{3}{2}kT$ avec $k = \frac{\mathcal{R}}{N_A}$.

- (a) Donner l'énergie totale E_S du Soleil supposé isolé dans l'espace.
- (b) Donner une condition suffisante pour que le rayon du Soleil reste fini, c'est-à-dire pour que le Soleil ne soit pas en expansion infinie.
- (c) En déduire la valeur maximale de la température T qui satisfait la condition précédente.
- (d) Application numérique : calculer cette température maximale.

2. Stabilité dynamique.

On utilise le modèle d'une étoile sphérique homogène de rayon R et de masse M en rotation propre de période constante autour de l'un de ses diamètres et constituée par un gaz de particules entraînées à la même vitesse angulaire que celle de l'étoile.

- (a) Donner la vitesse de libération v_i à la surface de l'étoile.
- (b) Donner la condition de stabilité dynamique de l'étoile.
- (c) Application numérique : le Soleil vérifie-t-il la condition de stabilité dynamique ? Justifier votre réponse par des valeurs numériques.

- (d) Que se passe-t-il pour une étoile lorsque la vitesse de libération est supérieure à la vitesse de la lumière ? Quelle est la condition sur le rapport $\frac{M}{R}$ pour de tels corps ? En déduire la condition sur la masse volumique de l'étoile.
- (e) Application numérique : calculer, pour une étoile de rayon R_S , la masse volumique minimale pour que la vitesse de libération soit supérieure à la vitesse de la lumière. Commenter cette valeur numérique.

3. Aspect hydrostatique.

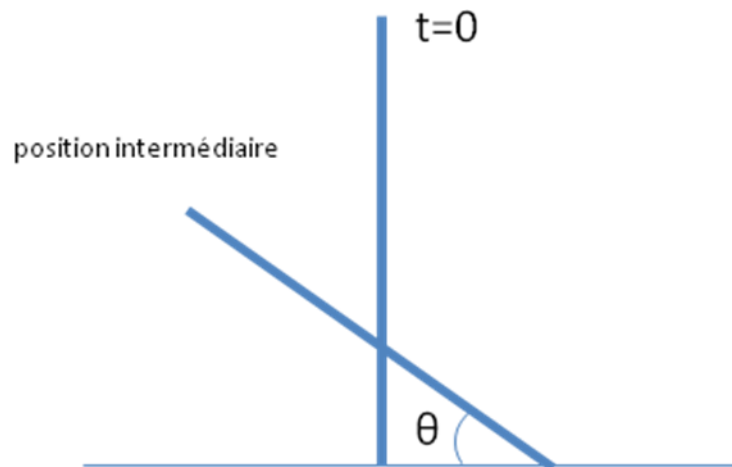
On utilise le modèle d'une étoile sphérique homogène de rayon R et de masse M , sans rotation propre, dont la masse volumique $\rho(r)$, la pression interne $P(r)$ et la température $T(r)$ ne dépendent que de la distance r au centre de l'étoile. De plus l'étoile est assimilée à un gaz parfait constitué d'atomes d'hydrogène en équilibre hydrostatique, c'est-à-dire que chaque élément de volume de matière dV est en équilibre sous l'effet des forces gravitationnelles et des forces de pression.

- (a) Rappeler le principe fondamental de la statique des fluides. On exprimera $\vec{\text{grad}}P$ en fonction de $\rho(r)$ et de $\vec{g}$.
- (b) En déduire $\frac{dP}{dr}$ dans le cas de l'étoile sphérique en fonction de G , r , $\rho(r)$ et de $M(r)$, masse contenue dans la boule de rayon r .
- (c) On souhaite obtenir un ordre de grandeur pour la température T_C au centre du Soleil. Pour ce faire, on suppose que la fonction $P(r)$ est affine, et nulle à la surface du Soleil. On remplacera $\rho(r)$ par la masse volumique moyenne du Soleil et le terme $\frac{M(r)}{r^2}$ par la valeur "moyenne" $\frac{M_S/2}{(R/2)^2}$. Exprimer P_C , puis T_C , en fonction de G , M_S , R_S , $\Re$ et M_H .
- (d) Application numérique : calculer T_C .

Deuxième partie

Exercices (4pts)

1. Une fusée de feu d'artifice explose dans le ciel à une hauteur h de manière isotrope.
 - (a) Montrer que les étincelles en retombant forment à chaque instant une sphère.
 - (b) Calculer le rayon du disque formé par les particules quand elles sont toutes tombées au sol.
2. Un satellite est en orbite circulaire de rayon r_0 autour de la terre. Montrer qu'en dessous d'une certaine valeur de r_0 , le satellite se désagrège ("limite de Roche").
3. Une échelle verticale tombe de sa hauteur sans vitesse initiale. Le contact avec le sol se fait sans frottement.



- (a) Exprimer la vitesse V_G (du centre de masse) en fonction de Ω (la vitesse angulaire) et θ . Calculer la vitesse V_G lorsque l'échelle touche le sol sur toute sa longueur.
- (b) Ecrire l'équation de mouvement du centre de masse dans les premiers instants de la chute. On note $\alpha = \pi/2 - \theta$. Montrer que l'angle α croît selon une loi exponentielle de temps caractéristique $\tau = \sqrt{\frac{L}{6g}}$.